C. F. Manara / Spunti per un'analisi

EVIDENZE & POSTULATI NELLA GEOMETRIA

Nella geometria, i concetti di base non sono affatto — contrariamente a quanto comunemente si pensa — dei dati empirici puri e semplici; tantomeno sono princìpi evidenti. Si tratta piuttosto — sostiene in questo saggio il prof. Carlo Felice Manara, ordinario di geometria nella facoltà di scienze dell'Università statale di Milano e acuto epistemologo — di postulati, che derivano bensì dall'esperienza sensibile, ma sono elaborati dall'immaginazione in modo arbitrario: e da questa arbitrarietà — che poi può anche rivestirsi di "praticità" in ordine alle applicazioni fisico-matematiche — deriva il fatto che la geometria euclidea possa convivere con le geometrie non-euclidee in un medesimo discorso, in una medesima logica di ricerca matematica.

« La questione "che cosa è lo spazio" non ha cessato di sollevare discussioni tra i filosofi fino dall'antichità ». Così suona la frase iniziale dell'articolo di Federigo Enriques intitolato *Spazio e tempo davanti alla critica moderna* e inserito nel Vol. II dell'opera *Questioni riguardanti le matematiche elementari* (1).

Siamo convinti che la frase dell'illustre matematico e filosofo risponda pienamente alla verità, e quindi non ci illudiamo di esporre cose molto importanti in un argomento che ha occupato le menti dei più grandi filosofi dell'umanità. Tuttavia riteniamo che qualche chiarimento non sia del tutto inutile, soprattutto in presenza del fatto che l'argomento non cessa di interessare anche oggi i ricercatori, e soprattutto i fisici e i filosofi della scienza.

Molti di essi infatti vogliono meditare sul significato e sull'essenza delle teorie che si costruiscono incessantemente allo scopo di conoscere sempre meglio l'universo che ci circonda. Anticipando qui in parte le conclusioni, diremo che per parte nostra pensiamo che sia forse non troppo opportuno parlare di "spazio", quasi che questo termine designasse un ente ben determinato. Naturalmente non intendiamo qui aprire una discussione filosofica, né contrastare a una abitudine di espressione che si è diffusa anche nella letteratura scientifica. Tuttavia crediamo che allo stato attuale della critica sui fondamenti delle matematiche, il termine "spazio" potrebbe risultare equivoco; per esempio è poco opportuno e anche fuorviante parlare di "proprietà dello spazio", quando si sa bene che la critica geometrica del secolo XIX ha tolto a questa e a simili espressioni ogni significato scientifico.

(1) Federigo Enriques, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Bologna 1925.

Per esempio, il solo fatto che in geometria si parli di "spazio affine" oppure di "spazio proiettivo" oppure di "spazio euclideo" indica che il termine ha un significato che è sostanzialmente convenzionale e che ogni definizione che se ne volesse dare ha il significato che Pascal ha così chiaramente spiegato (2).

In particolare, pensiamo di poter adottare la concezione moderna, secondo la quale le proprietà di uno spazio sono determinate dalle proposizioni primitive che si enunciano all'inizio di una teoria (postulati) e quindi non si accetta che esista uno spazio in sé, avente certe proprietà evidenti, talmente evidenti che basta aprire gli occhi per vederle, e altre meno evidenti, che debbono essere dedotte con il ragionamento o con il calcolo.

la crisi della geometria classica

Per poter esporre più chiaramente il nostro pensiero, crediamo sia utile una breve rassegna sulla concezione classica della geometria e sulla crisi vissuta da questa scienza durante il secolo XIX. Invero, nell'atteggiamento classico la geometria ci si presenta come una dottrina che enuncia delle proposizioni vere a proposito di certi oggetti: punti, rette, piani, figure, ecc.; tali proposizioni sono accettate come vere per due ragioni: o perché sono considerate come evidenti per sé, oppure perché sono dimostrate in modo logicamente rigoroso a partire dalle prime, che sono chiamate "postulati".

La storia ha registrato discussioni, durate più di venti secoli, a proposito delle proposizioni enunciate da Euclide senza dimostrazione, cioè di quelle che Euclide enumera tra i postulati; in particolare fu oggetto di discussione il quinto postulato, quello che viene comunemente chiamato "della parallela", perché equivale sostanzialmente alla affermazione della unicità della parallela condotta a una retta da un punto fuori di essa. I numerosi tentativi fatti per ricondurre questa proposizione nel numero dei teoremi, cioè per dimostrarla logicamente, potrebbero essere interpretati come altrettante prove del fatto che la proposizione stessa è stata per lunghissimo tempo considerata come vera obbiettivamente, cioè come una proposizione che enuncia delle proprietà vere di certi enti effettivamente esistenti.

Sulla natura di questi enti non pare che esistessero dubbi, anche se si discusse a lungo sul significato e sulla portata delle proposizioni che Euclide enuncia su di loro: invero negli *Elementi* si trovano delle frasi iniziali che Euclide chiama "termini" (*oroi*, in greco) e le prime due di esse sono:

1) « Il punto è ciò che non ha parte ».

2) « La retta è la linea che giace ugualmente rispetto a tutti i suoi punti ».

Per più di venti secoli glossatori e commentatori di Euclide si sono sforzati di interpretare queste proposizioni (3); riteniamo di poter dire che la opinione della critica moderna è che tali frasi non siano delle *definizioni* nel senso tecnico del termine, ma piuttosto delle illustrazioni, dei chiarimenti, degli aiuti per i lettori o per gli ascoltatori a formarsi le immagini, e poi i concetti del punto, della retta e degli altri enti successivamente nominati. A conforto di questa tesi sta anche la osservazione che mai, nel seguito del trattato euclideo, nessuna proposizione viene fondata, nessuna dimostrazione viene condotta a fine con riferimento alle frasi che abbiamo riportato: nessun ragionamento viene concluso dicendo per esempio: « ...e ciò è vero perché il punto non ha parti ».

Queste difficoltà nella precisazione della natura degli enti di cui la geometria parla si accompagnarono alle difficoltà che riguardavano (come abbiamo già detto) le altre proposizioni iniziali del trattato euclideo. Si giunse così all'idea di costruire una geometria "assoluta", cioè di costruire un sistema di proposizioni che fossero valide indipendentemente dalla validità o meno del postulato euclideo della parallela (4); si giunse a costruire delle dottrine in cui le proposizioni iniziali fossero sostanzialmente la negazione del postulato euclideo (5); si giunse a cercare di costruire la geometria su basi di partenza del tutto diverse da quelle che servirono da piedestallo per Euclide (6).

Il passo definitivo, in questa direzione, fu com-

(2) Blaise Pascal, *De l'esprit géometrique et de l'art de persuader*.

(3) Thomas L. Heath, *The therteen books of Euclid's Elements*, Cambridge 1926.

(4) Cfr Giovanni Bolyai, *La science absolue de l'espace indépendente de la verité ou de la fausseté de l'axiome XI d'Euclide*, Parigi 1896.

(5) Cfr Ivan I. Lobatchœwski, *Recherches géométriques sur la théorie des parallèles*, Parigi 1900.

(6) Cfr Bernhard Riemann, *Über die Hypothesen welche der Geometrie qu Grunde Liegen*, in *Gesammelte Mathem. Werke*, Leipzig 1876.

piuto quando si giunse alla dimostrazione della compatibilità logica delle geometrie non euclidee, cioè si giunse alla certezza che queste dottrine non contengono in sé delle contraddizioni, ma hanno lo stesso rango, lo stesso diritto di cittadinanza nell'ambito della matematica, che compete alla geometria euclidea classica.

Non intendiamo insistere sull'argomento, ma ci limitiamo a concludere che il risultato della dimostrazione della compatibilità logica delle geometrie non euclidee fu — tra l'altro — l'abbandono del modo di pensare che portava a considerare la geometria come scienza di determinati oggetti, del modo di pensare che portava a definire la geometria come scienza delle figure oppure dello spazio geometrico oppure con altre frasi della stessa o di analoga natura. Invero se esistesse un oggetto determinato, studiato dalla geometria, questo non potrebbe essere conosciuto attraverso teorie tra loro contraddittorie: la sua esistenza dovrebbe comportare la validità di una delle geometrie e la falsità delle altre. Invece si verifica il fatto, abbastanza paradossale, che, per esempio, nella procedura di E. Beltrami (7), la geometria euclidea fornisce gli strumenti per costruire dei modelli che portano a costatare la validità della non euclidea; e viceversa, nello spazio di Lobatchewski, sulla orisfera vale la geometria euclidea (8).

È comprensibile che una situazione di questo genere possa portare inizialmente ad un certo grado di perplessità; è anche comprensibile che tale perplessità sia resa ancor più grave dalla immagine che tradizionalmente si aveva della geometria, scienza considerata come paradigma della chiarezza e della certezza; a tal punto che Spinoza aveva intitolato una sua opera *Ethica ordine geometrico demonstrata*, quasi per dare, attraverso il richiamo alla geometria, l'immagine del rigore deduttivo e della chiarezza espositiva.

Aldilà di ogni situazione psicologica di disagio e di perplessità, è evidente che una situazione gnoseologica di questo genere ha portato con sé la necessità di rivedere la interpretazione e il giudizio sul significato della geometria.

Quindi, nell'atteggiamento attuale, la geometria non è più considerata al modo classico, come una scienza che parla di certi oggetti e di certi contenuti, ma come un *sistema ipotetico-deduttivo*, una specie di mero gioco logico, le cui regole sono costituite dai postulati, cioè dalle proposizioni iniziali che si enunciano senza dimostrazione e nel quale la validità delle proposizioni dimostrate (teoremi) consiste essenzialmente nel rigoroso rispetto delle regole logiche che permettono di dedurle dalle proposizioni iniziali. Se ne può avere un'idea considerando per esempio l'inizio del classico trattato di D. Hilbert: « Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti; chiamiamo punti gli oggetti del primo sistema [...]; chiamiamo rette gli oggetti del secondo sistema [...]; chiamiamo piani gli oggetti del terzo sistema » (9).

In un atteggiamento cosiffatto non si cerca di determinare esplicitamente la natura degli oggetti indeterminati di cui si parla; tale natura viene definita implicitamente dal sistema di proposizioni iniziali che si enunciano.

Queste proposizioni dànno pertanto quella che si chiama la "definizione implicita" degli oggetti considerati; e non vi è alcuna ragione di perplessità nel fatto che oggetti a cui sono attribuiti nomi uguali abbiano diverse proprietà in diverse teorie; semplicemente essi sono degli oggetti diversi, perché diversi sono i sistemi di postulati che li definiscono, e la uguaglianza dei nomi è da considerarsi del tutto accidentale. Così come con un medesimo mazzo di carte si possono fare vari giochi, in ciascuno dei quali una medesima carta ha diversi valori; la uguaglianza dei nomi e degli aspetti esteriori è puramente accidentale, perché la diversità delle regole di gioco fa sì che si tratti di carte essenzialmente diverse.

Appare abbastanza naturale che, in questo ordine di idee, l'osservazione del mondo esterno non impone più le proposizioni iniziali, da accettarsi perché "evidenti" in se stesse, ma semplicemente suggerisce tali proposizioni, le quali possono essere scelte con una certa arbitrarietà, che rispetti tuttavia (anche in senso molto lato) la natura della scienza che si sta costruendo e la continuità della tradizione secolare di essa.

Va osservato tuttavia che, da un atteggiamento cosiffatto, che si presenta in teoria come semplice e rigoroso, nascono vari problemi, a differenti livelli epistemologici. Noi ci limiteremo qui ad accennare ad alcuni di questi problemi, più che altro per testimoniare della complessità delle questioni in parola; ci soffermeremo invece su altri, sui quali vogliamo qui concentrare la nostra attenzione.

Vorremmo anche precisare che a nostro parere i problemi del primo tipo sono ad un livello logico astratto; e tra essi vorremo ricorda-

(7) Cfr Eugenio Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, in *Giornale di matematica* (1868).

(8) Cfr Gino Fano, *Geometria non euclidea (Introduzione geometrica alla teoria della relatività)*, Bologna 1935.

(9) David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*; tr. it.: *Fondamenti di geometria*, Milano 1970.

re le questioni riguardanti la scelta dei sistemi iniziali di postulati della teoria che si costruisce in modo che sia garantita la loro compatibilità e non contraddittorietà.

A proposito della scelta di un sistema di postulati bisogna ricordare, oltre all'opera fondamentale di D. Hilbert già citata, anche tutto il lavoro di G. Peano e della sua scuola, così come l'opera di F. Enriques e della scuola matematica che a lui faceva capo. Nel caso di Peano, la ricerca della perfezione logica e della eleganza concettuale ha portato a far sì che le proposizioni iniziali della teoria geometrica siano addirittura scritte spesso con il simbolismo ideografico proprio degli studi di logica che da Peano avevano avuto origine; per quanto riguarda la scuola di F. Enriques, va ricordato l'insieme delle analisi storiche che condussero questo grande matematico a sondare la genesi delle idee fondamentali e degli sviluppi della geometria per meglio comprendere il significato di questa scienza, cogliendone le strutture di base in quello che si potrebbe chiamare lo stato nascente.

Per quanto riguarda infine la questione della coerenza e della non contraddittorietà di un sistema di postulati, dobbiamo limitarci a dire che la questione coinvolge, in modo più o meno diretto, tutto il campo dei fondamenti della matematica. Invero appare chiaro che, quando si abbandoni la evidenza delle proprietà di un oggetto — supposto realmente esistente — come fondamento della validità delle proposizioni primitive, queste ultime diventano (come si è detto) le regole di un gioco, che possono essere diversamente interpretate e ammettono diversi contenuti o — come suol dirsi — diversi modelli.

Il caso tipico è fornito dalla geometria proiettiva dello spazio reale tridimensionale, nella quale la legge di dualità permette di interpretare in due modi diversi ogni postulato e ogni proposizione che se ne deduce, ottenendo così delle proposizioni sempre valide.

L'atteggiamento adottato da Hilbert e da altri conduce a costruire dei contenuti dei postulati, dei modelli della teoria, mediante enti presi da altri capitoli della matematica; è chiaro che in questo atteggiamento il problema non viene risolto fino in fondo, ma semplicemente scaricato sugli altri capitoli della matematica con i quali vengono costruiti i modelli, capitoli ai quali viene demandato il compito di garantire o di assicurare i propri fondamenti.

Non intendiamo approfondire qui i problemi logici che riguardano le questioni del primo tipo, perché — ripetiamo — intendiamo dedicare la nostra attenzione a un altro genere di questioni.

Per quanto riguarda invece i problemi del secondo tipo, bisogna soffermarci sulle possibili ipotesi riguardanti la genesi psicologica dei concetti della geometria, il significato e la portata delle conoscenze geometriche le quali nascono dalla conoscenza delle realtà materiali, e infine sui rapporti di queste conoscenze con le altre scienze che si occupano della realtà materiale, in particolare la fisica.

Dedicheremo il prossimo paragrafo alla esposizione degli studi sulla genesi psicologica dei concetti geometrici, per riservare i successivi alla analisi del significato fisico delle dottrine geometriche e del loro rapporto con le altre scienze che si occupano della realtà concreta, della materia, della energia e dei loro mutamenti.

genesi psicologica dei concetti della geometria

Abbiamo visto che nel secolo XIX la geometria ha vissuto una crisi di importanza fondamentale: crisi che ha costretto i matematici a cambiare radicalmente il proprio modo di giudicare questo ramo della loro scienza. Appare quindi anche naturale che nello stesso secolo abbiano avuto una grande fioritura gli studi dedicati alla analisi della genesi psicologica dei concetti della geometria. Anche su questo argomento sarebbe imprudente e illusorio cercare di dare una esposizione completa della evoluzione del pensiero dei matematici e dei filosofi che se ne sono occupati; ci limiteremo quindi a esporre i momenti e gli atteggiamenti che ci sembrano più significativi.

A questo proposito è particolarmente interessante la posizione esposta da F. Enriques nel trattare del *Problema psicologico dell'acquisto delle nozioni spaziali* (10). Egli infatti distingue tra le nozioni concernenti la geometria proiettiva (che riguardano soltanto i concetti di punto, retta, piano e le relazioni di appartenenza) e quelli della geometria metrica (elementare, nel senso classico della parola) che coinvolgono anche nozioni di uguaglianza, di trasporto rigido e quindi di movimento.

La genesi psicologica delle nozioni della geometria proiettiva è quindi da far risalire alle

(10) Cfr *Questioni...*, cit.

sensazioni acquisite mediante gli organi della vista, mentre la genesi psicologica delle nozioni e dei concetti della geometria metrica è da far risalire a sensazioni di natura più complessa: tattili-muscolari, propriocezione ecc. E anche in questo secondo genere di sensazioni vi è luogo a distinguere tra quelle dovute al tatto speciale, che potrebbero dar luogo alle nozioni riguardanti la congruenza (e quindi alla geometria metrica nel senso generico del termine) e quelle tattili-muscolari generali, che darebbero luogo alla categoria di nozioni riguardanti la teoria del continuo, la quale viene — dice Enriques —" ... edificata sui concetti primi generalissimi di linea, superficie, varietà a più dimensioni, e dà luogo ad una ricerca critica preliminare, indipendente dalla proiettiva e dalla metrica".

Lo stesso Enriques riassume la sua analisi nelle righe seguenti: « I tre rami della geometria, in essa differenziatisi, cioè la teoria del continuo, la geometria metrica e la proiettiva, avuto riguardo all'acquisto psicologico dei loro concetti fondamentali, appaiono connessi a tre ordini di sensazioni: rispettivamente alle sensazioni generali tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e della vista ».

Come si è visto, l'analisi di Enriques attribuisce la genesi dei concetti che portano alla geometria euclidea elementare classica al dominio delle sensazioni tattili-muscolari; invero la operazione del trasporto rigido dei corpi solidi è alla base del concetto di uguaglianza delle figure geometriche, così come spesso è anche oggi definita nelle trattazioni elementari; invero capita ancora oggi di leggere frasi come la seguente: « Due figure si dicono uguali quando, portate a sovrapporsi, coincidono ». Ovviamente delle frasi come queste, o altre equivalenti dal punto di vista logico, si fondano sul concetto (ritenuto evidente) di corpo rigido, e sul concetto (pure ritenuto evidente) del trasporto di un corpo senza che questo cambi. È chiaro che quest'ultima clausola implica l'avere accertato che cosa significa "non cambiare", e ciò implica a sua volta la conoscenza del concetto di congruenza che la frase stessa pretenderebbe di definire. Il circolo vizioso che viene così a instaurarsi deve quindi essere rotto in qualche modo; e ciò è stato fatto con vari atteggiamenti, e qui ne ricorderemo soltanto due fondamentali: il primo, assunto per esempio da D. Hilbert nella sua opera citata, conduce a definire in modo implicito, per postulati, la relazione di congruenza. Il secondo conduce a precisare che cosa si intenda per "trasporto"; questa seconda strada fu seguita da H. Helmholtz, il quale espose le sue idee in alcune classiche memorie (11). Le idee di Helmholtz vennero ulteriormente sviluppate da F. Klein, il quale collegò la nozione di trasformazione geometrica con quella fornita dalla struttura algebrica di gruppo (12). Le idee di Klein si rivelarono di estrema fecondità e — a parere nostro — influenzarono anche la impostazione che A. Einstein diede della teoria della relatività speciale e generale, filtrando attraverso anche le ricerche di G. Ricci Curbastro e T. Levi Civita.

Del resto, si potrebbe dire che questa corrente di pensiero è in stretto collegamento con la strada che già era stata imboccata da B. Riemann, nella sua celebre memoria già citata; cercando di esprimere in forma grossolana e approssimativa le idee di Riemann e quelle che erano in germe nella sua esposizione, si potrebbe dire che in questo atteggiamento non si prende posizione sulla totalità dello spazio geometrico, o meglio si distinguono i problemi riguardanti la porzione di spazio costituita dai punti vicini a un punto dato da quelli che riguardano l'intero spazio; nell'intorno di ogni punto dello spazio si dànno le regole per misurare la distanza tra due punti (abbastanza vicini) e l'angolo tra due direzioni; queste "geometrie" delle varie porzioni di spazio vengono poi "collegate" mediante adeguate leggi di raccordo, che dànno l'effettiva struttura globale dell'insieme di tutti i punti che si considerano. È appena necessario osservare che questi studi e gli sviluppi di queste idee hanno un collegamento molto stretto con il problema che qui ci interessa in modo particolare, cioè il problema del significato e della portata degli sviluppi della geometria sulla conoscenza del mondo reale che ci circonda; problema che è stato spesso enunciato in forma che — come abbiamo detto — rischia di essere fuorviante ed equivoca, come il problema della geometria dello spazio fisico.

In questo ordine di idee — a nostro parere — è difficile dare un senso al problema che porta a domandarsi quale sia la "geometria vera" dello spazio reale, cioè dell'insieme dei corpi materiali e dei fenomeni energetici che noi osserviamo e che cerchiamo di conoscere. A questo proposito pensiamo di poter condividere

(11) Cfr Hermann Helmholtz, *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie qum Grunde liegen*; Idem, *Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie*, in *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Leipzig 1883.

(12) Cfr Felix Klein, *Vorlesungen über nicht-euclidische Geometrie*, Berlino 1928, Idem, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Gottinga 1872; tr. it.: *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*, in *Annali di Matematica* (1891).

le idee che G. Fano esprime, a conclusione della sua esposizione sull'indirizzo elementare della geometria non euclidea: « I concetti geometrici, benché acquisiti a mezzo di elementi sensibili, sono puramente astratti. Non esiste nel mondo fisico nulla che corrisponda con precisione ai concetti astratti di retta e di triangolo; non si possono quindi "misurare" gli angoli di un triangolo (astratto), né affermare che nello spazio fisico sia *verificata* una determinata geometria (astratta). Le proprietà di posizione e grandezza dei corpi possono essere rappresentate da una teoria astratta soltanto in modo più o meno approssimato » (13).

Ci pare di intravedere qui una critica alle idee esposte da Gauss, il quale aveva progettato una specie di *experimentum crucis* per decidere sulla validità o meno della geometria euclidea nello "spazio reale"; tale esperimento avrebbe dovuto essere realizzato con la misura degli angoli di un triangolo molto grande. F. Enriques attribuisce a Gauss il progetto di misurare gli angoli del triangolo avente come vertici Brocken, Hohenhagen e Inselberg, e attribuisce a Lobatchewski, sulla scorta delle idee di Schweikart, il progetto di servirsi di triangoli astronomici.

Poiché misure cosiffatte si potrebbero eseguire soltanto con osservazioni ottiche, pare a noi che questi esperimenti non possano portare a risultati conclusivi per quanto riguarda la geometria; al massimo i loro risultati potrebbero essere enunciati dicendo, per esempio, che il comportamento dei raggi luminosi può essere descritto, in forma più o meno approssimata, da una delle geometrie astratte che sono state costruite.

Pensiamo che questa posizione concordi con quella espressa in *Science et hypothèse* da H. Poincaré, il quale ha affermato che "nessuna esperienza ha come oggetto lo spazio o le relazioni dei corpi con lo spazio, ma soltanto le relazioni dei corpi tra loro".

Di conseguenza la domanda: « La geometria euclidea è vera? », per Poincaré è priva di senso. Al massimo ci si può domandare quale sia la geometria più adeguata per descrivere le esperienze che noi eseguiamo sulla materia o sulla energia, e sui loro spostamenti.

Del resto questa posizione era già stata presa da Leibnitz; invero, secondo le idee di questo filosofo ... *non vi è spazio assoluto reale, vale a dire che lo spazio non è qualche cosa di definito in sé, ma ha soltanto un senso relativo ai corpi, come "ordine delle coesistenze", così come il tempo è l' "ordine delle successioni".*

(13) Gino Fano, *Op. cit.*

postulato di comprensibilità del reale

Il lettore si sarà accorto che noi condividiamo le tesi di H. Poincaré e di G.W. Leibnitz esposte fin qui; pensiamo infatti che solo così si ottenga il rispetto pieno della esperienza e del significato di una teoria fisico-matematica della realtà; invero, sempre secondo il pensiero di Poincaré, si può dire in generale di una teoria cosiffatta ciò che è stato detto della geometria: non ha senso domandarsi se sia vera o falsa, ma soltanto se sia adeguata per descrivere in modo soddisfacente le nostre esperienze in un determinato momento della storia ed entro determinati limiti di approssimazione. Pensiamo invero che da questo punto di vista, cioè nell'ambito di una sistemazione razionale e metodica delle nostre esperienze sui corpi rigidi, la geometria si presenti come il primo capitolo della fisica, cioè come il primo passo sul cammino della descrizione razionale e della deduzione rigorosa di quelle proprietà che ci interessano, sotto un certo punto di vista e per determinati fini. Crediamo che si adatti al caso della teoria fisico-matematica il paragone della carta topografica: infatti ci serviamo di un mezzo cosiffatto per studiare una parte ristretta della superficie terrestre, mentre siamo ben consci di commettere degli errori perché, in forza di classici teoremi di geometria differenziale, sappiamo bene che non è possibile applicare il piano sulla superficie sferica senza lacerazioni o duplicazioni. Tuttavia sappiamo anche bene che lo strumento è atto ai fini pratici e anche teorici a cui lo si destina entro determinati limiti di approssimazione, che dipendono dal problema che si sta considerando. Pertanto, pensiamo che non vi sia nulla di contraddittorio nell'utilizzare diverse "geometrie", cioè diversi sistemi teorici, per descrivere i fenomeni che riguardano la materia o l'energia, perché siamo ben consci del fatto che nessuna di esse può pretendere di dire *tutta* la verità su certi fenomeni, ma che di volta in volta va scelta quella più adeguata per razionalizzare le relazioni spaziali dei corpi e degli stati di energia e per dedurre le conseguenze, prevedendo in modo coerente i risultati delle esperienze future.

Tutto ciò ci sembra perfettamente consono con quel "Postulato di comprensibilità del reale" che F. Enriques riconosce come fondamento essenziale per basare ogni tentativo di spiegazione scientifica della realtà (14).

Pensiamo che questo atteggiamento sia rigoroso e rispettoso della esperienza e del metodo scientifico rettamente inteso, ma ci rendiamo conto che esso può presentare qualche difficoltà a chi sia solito attribuire agli enunciati della scienza "positiva" un valore assoluto e definitivo, cioè a chi assuma di fronte alla scienza un atteggiamento che vorremmo chiamare convenzionalmente euclideo-newtoniano. E si può comprendere l'origine di un atteggiamento cosiffatto, e anche il suo permanere nelle menti di molti, quando si tenga conto della importanza che ha la fantasia elaboratrice, creatrice e trasformatrice nella costruzione della nostra immagine del mondo.

Non intendiamo estendere la nostra analisi a tutto il pensiero scientifico, e vorremmo quindi limitarci ad analizzare il caso della geometria e della fisica. A questo proposito pensiamo sia legittimo ritenere che nella costruzione di queste scienze sia utile, per non dire addirittura necessario, distinguere tre fasi della costruzione di ogni teoria. Una prima fase consiste nella percezione della realtà sensibile; l'assoluta necessità di questa prima fase della cognizione umana viene codificata nel classico detto: *nihil est in intellectu quod prius non fuerit in sensu.*

La seconda fase consiste nella elaborazione fantastica della immagine fornita dai sensi, elaborazione che fornisce all'intelletto il materiale per la costruzione intellettuale. Questa costituisce la terza fase, che si realizza nella concezione delle idee e nella loro espressione verbale o simbolica.

Nel caso della geometria, si potrebbe prendere in considerazione il concetto di punto e la sua nascita, identificando anzitutto la prima fase con la percezione di un corpicciuolo molto piccolo. È chiaro che questa espressione ha un significato essenzialmente soggettivo e relativo: perché un granello di sabbia, per esempio, può essere considerato molto piccolo se rapportato a un monumento, e molto grande se introdotto nel delicatissimo meccanismo di un orologio di precisione. Nel secondo momento la fantasia elabora i dati della percezione, costruendo l'immagine di un oggetto sempre più piccolo, indefinitamente piccolo. Ovviamente questa elaborazione fantastica non è ancora la costruzione del concetto di punto, ma ne è un momento essenziale; la definizione del concetto di punto geometrico giunge a compimento quando si esprimono con mezzi linguistici, e non con immagini, i rapporti logici che il concetto determina e dai quali viene a sua volta determinato. In altre parole, la definizione del concetto di punto può venir considerata completa quando si enunciano delle frasi che riconducono il concetto stesso ad altri già conosciuti, oppure quando si dia un insieme di proposizioni primitive che conducano alla definizione implicita del concetto stesso.

Riteniamo che una analisi analoga possa essere svolta a proposito di ogni concetto di cui si serve la geometria; a questo proposito pensiamo sia di particolare interesse l'esempio offerto dal concetto di *continuo geometrico.* È noto che tale concetto è molto complesso e che è stato definito e formulato rigorosamente in forma soddisfacente e chiarito sino in fondo soltanto dalle analisi del secolo XIX e del secolo XX. Riteniamo tuttavia di poter affermare che esso ha una radice sperimentale ed ha la sua origine nelle sensazioni dei nostri sensi (vista e tatto) i quali, a causa delle loro limitazioni, non percepiscono la struttura granulare della materia, struttura che ci è presentata teoricamente e sperimentalmente dalla fisica moderna. La fantasia integra ed elabora queste sensazioni incomplete dei sensi esterni facendo una extrapolazione che non contraddice, ma completa e integra i dati sensibili. Si giunge così alla formulazione teorica rigorosa, la quale avviene (sui dati della fantasia che ha elaborato i dati sensibili) mediante strumenti concettuali e linguistici, che utilizzano per la espressione dei concetti le parole del linguaggio comune oppure i simboli dell'analisi matematica.

Per fare un altro esempio, possiamo pensare che la vista di un filo teso sia il fondamento su cui la fantasia elabora il concetto di retta indefinitamente prolungabile, la quale viene poi definita implicitamente in modo rigoroso mediante un sistema di assiomi o di postulati. In modo analogo possiamo pensare che la vista di uno specchio o di una superficie di lago calmo sia il punto di partenza sul quale si appoggerà la costruzione del concetto di piano. Ma il fatto che questa immagine sia estesa indefinitamente fuori della portata delle nostre attuali possibilità di osservazione è ovviamente frutto dell'intelletto e non è convalidato da alcuna esperienza concreta; anzi, se volessimo fare l'esperienza di procedere sempre nella stessa direzione lungo questo specchio d'acqua troveremmo che esso non risponde affatto alla definizione di "piano" della geometria euclidea e

(14) Cfr Federigo Enriques, *Per la storia della logica*, Bologna 1936.

soprattutto non risponde a quella immagine che l'immaginazione ci offre di questo ente.
Volendo cercare di riassumere, potremmo dire che gli oggetti di questa dottrina che abitualmente viene chiamata geometria non sono completamente frutto della immaginazione ma certo sono *anche* risultati dell'opera di questa nostra facoltà; pertanto lo spazio, questo ente immenso, oscuro e vuoto che viene abitualmente immaginato, è costruito dalla mente sulla base di sensazioni più o meno univoche o precise, e viene poi fatto oggetto di una teoria quando le proprietà degli enti che si immaginano in esso contenuti sono formulate linguisticamente in modo preciso mediante postulati.
Queste considerazioni sono addirittura banali, ma mostrano tuttavia tutta la loro importanza quando si voglia applicare la geometria che abbiamo costruito alla conoscenza degli oggetti della natura e in particolare a quelli che vengono tradizionalmente considerati come gli oggetti della fisica, che è la più matematizzata tra le scienze della natura. Invero in questo caso nulla vieta che noi utilizziamo gli schemi teorici che sono forniti dall'una oppure dall'altra delle geometrie che l'uomo ha costruito per spiegare — nei limiti del possibile — le cose che noi osserviamo. Ma nessuno può pretendere che vi siano delle proprietà geometriche *intrinseche* dello spazio fisico, perché ovviamente le proprietà che osserviamo e che deduciamo sono quelle degli enti che guardiamo, tocchiamo e misuriamo in qualche modo.
Del resto vale la pena di ricordare che l'intervento dell'immagine intellettuale nella costruzione dei concetti e quindi della conoscenza umana è dottrina che è stata formulata da tempo e non soltanto nei riguardi della geometria.

estensione al campo della fisica

Ciò che è stato detto finora a proposito della geometria può essere esteso al campo della fisica. Vorremmo anzi dire che in questo campo i problemi che vengono abitualmente formulati come "problemi della geometria dello spazio fisico" assumono un aspetto esteriormente diverso, ma sostanzialmente non molto dissimile, presentandosi come problemi della oggettività della conoscenza fornita dalla meccanica in particolare e dalla fisica in generale. Invero ci pare di poter dire che, nel campo delle scienze sperimentali e ai fini della conoscenza del mondo fornita dalla scienza fisicomatematica, pare ovvio che la ricerca della obiettività (fondata esigenza, basata su un sano realismo, necessario, anche se non espresso, per ogni costruzione scientifica) viene tradotta nella ricerca della intersoggettività; in altre parole, si vuole che le descrizioni del mondo che vengono date da due diversi osservatori siano coerenti. E con questo termine indichiamo l'esigenza che le relazioni e le leggi del mondo espresse da uno degli osservatori siano controllabili anche dall'altro, con modalità stabilite e indipendenti dai fenomeni osservati e dagli osservatori.
Riteniamo tuttavia di poter dire che è difficile stabilire in assoluto, una volta per tutte, a quale livello si debba situare questa controllabilità sperimentale delle esperienze dell'uno degli osservatori da parte dell'altro. Per la meccanica di Newton (e per tutte le descrizioni della natura che si ispirano a quella) la controllabilità si situava al livello della singola misura di lunghezza e di intervalli di tempo. In altre parole, secondo questo atteggiamento, le misure delle lunghezze dei segmenti e di intervallo di tempo, fatte da un osservatore debbono poter essere ritrovate assolutamente uguali da un altro osservatore qualesivoglia (che beninteso utilizzi le stesse unità di misura). A questo proposito vorremo rifarci all'esempio che è fornito dalla geometria analitica e dalle sue formule; appare chiaro che le coordinate di un punto dello spazio dipendono essenzialmente dal riferimento che si sceglie: due osservatori diversi possono benissimo attribuire al medesimo punto due insiemi diversi di coordinate; ma entrambi gli osservatori posseggono delle formule che permettono di passare da una terna di coordinate all'altra, una volta che sia conosciuta la posizione di un riferimento rispetto all'altro; ovviamente gli osservatori non pretendono di attribuire un significato assoluto alle coordinate che essi dànno ai punti, ma soltanto a certe funzioni delle coordinate stesse, che rimangono numericamente invariate rispetto a un certo gruppo di trasformazioni. In questo caso l'intersoggettività viene realizzata con dei mezzi analitici più complicati di quanto non sia la pura coincidenza delle misure; ma l'obiettività, intesa come ricerca di determinati invarianti, viene lo stesso ottenuta, anche se con mezzi più scomodi e complessi.

Pertanto, anche nel caso della meccanica, non troviamo nulla di strano nel fatto che si possa superare la concezione newtoniana per giungere a una controllabilità che richieda procedimenti più complessi, soprattutto quando si tenga conto del fatto che il confronto delle descrizioni dell'universo fatte da due diversi osservatori implica lo scambio di informazioni e quindi l'invio di segnali che hanno velocità finita. Queste circostanze possono far variare il nostro modo di rappresentare matematicamente le leggi con le quali i fenomeni avvengono nello spazio e nel tempo, ma non presenta nulla di incoerente con l'esperienza e quindi di contrario alla ragione.

A questo proposito vorremmo dire qui che noi preferiremmo che, invece di parlare di "spazio" e di "tempo", si parlasse di "coordinate spaziali e coordinate temporali", perché effettivamente queste sono gli strumenti che noi adottiamo per descrivere i fenomeni che osserviamo e che studiamo. Tuttavia è un fatto che tali fenomeni sono da noi proiettati con la mente in un vuoto indeterminato e senza riferimento che noi chiamiamo abitualmente "spazio" e in una durata indefinita che noi chiamiamo abitualmente "tempo". Ma questa visione mentale, per quanto comoda e suggestiva, non ha nulla di necessario e soprattutto non ha diritto di imporsi perentoriamente alla nostra ragione quando la necessità della analisi critica delle nostre esperienze ci costringe a un esame più rigoroso e approfondito.

invariante & obiettività

Noi pensiamo infatti che nulla ci autorizzi a pretendere che le coordinate spaziali e temporali che noi attribuiamo, in un certo riferimento, a certi eventi fisici che avvengono sotto i nostri occhi debbano avere gli stessi valori per tutti gli osservatori. Ricordiamo anche, a questo proposito, la definizione classica del tempo: *Tempus est numerus motus secondum prius et posterius*, che potrebbe essere tradotta in termini moderni dicendo che il tempo è la misura del cambiamento (*motus*) secondo una direzione privilegiata (che considera il prima e il dopo). Tale definizione quindi non implica affatto quella durata infinita e immaginaria nella quale la nostra mente si compiace di proiettare i fenomeni, estendendola indefinitamente nel prima e nel poi. Invero, secondo questa concezione, dove non vi è cambiamento, dove non vi è *motus* alcuno, non ha senso parlare di tempo. E vorremmo ricordare anche qui che il problema non è nuovo e che l'atteggiamento da noi preso non ha nulla di originale; a titolo di esempio, ci riferiamo a ciò che dice Tommaso d'Aquino nella analisi che egli fa del modo di essere delle intelligenze separate: a tale proposito egli afferma che per loro il tempo viene misurato in maniera diversa che per noi, perché il loro modo di cambiare è diverso da quello che si verifica per noi, immersi come siamo nella necessaria evoluzione della parte materiale del nostro essere (15). Pertanto — ripetiamo — le coordinate temporali che ogni soggetto intelligente (osservatore) attribuisce a un determinato evento non hanno nessuna necessità di essere assolutamente uguali per tutti gli esseri intelligenti che osservano lo stesso evento. Ribadiamo invece che la sola cosa importante è che ogni osservatore dia una descrizione coerente dei fatti; e si possano avere delle leggi di passaggio che permettono la traduzione della descrizione di un osservatore a quella di un altro qualsivoglia. Pertanto, in questo ordine di idee, l'intersoggettività costituisce una condizione sufficiente per la obbiettività, perché le leggi sono scritte in modo che sia possibile la ricerca di "invarianti", cioè di quelle proprietà che possono essere considerate come veramente "obiettive", secondo la accezione abituale di questo termine.

Ci pare che questo atteggiamento non possa non soddisfare lo scienziato e soprattutto il fisico, il quale non avrebbe alcun interesse a parlare di cose che non possono in alcun modo cadere sotto la nostra esperienza; ma è interessato alla descrizione coerente della realtà sulla quale egli esperimenta, senza che sia obbligato a immaginare un riferimento assoluto, valido per tutti, o una coordinata temporale assoluta, che sia valida e legittima per tutti; un riferimento al quale tutti sono tenuti a riferirsi, ma che nessuno può raggiungere con esperimenti eseguibili concretamente (e non — ripetiamo — soltanto immaginati).

Carlo Felice Manara

---

(15) Cfr San Tommaso d'Aquino, *Summa theologiae*, I, q. 10, a. 5.